

Analyse II — Corrigé 9

Exercice 1. [Points stationnaires]

Déterminer les points stationnaires des fonctions suivantes et étudier leur nature (point selle, etc.):

a) $f(x, y) = x^3 - 3x + y^3 - 3y$

b) $g(x, y) = 3x^2 - xy^2 + y^4$

c) $h(x, y) = y^2 + y \cos x - \sin x - 2$

Solution:

a) Comme les dérivées partielles de f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3,$$

les points stationnaires de f satisfont

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Il s'agit donc de $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ et $(-1, -1)$. De plus,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$$

nous donnent

$$\det(\text{Hess}_f(x, y)) = 36xy$$

et le théorème du cours nous dit que $(1, 1)$ est un point de minimum local, $(-1, -1)$ est un point de maximum local alors que $(1, -1)$ et $(-1, 1)$ sont des points selle.

b) Comme les dérivées partielles de g sont

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 6x - y^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -2xy + 4y^3 = 2y(2y^2 - x),$$

les points stationnaires de g satisfont

$$\begin{cases} 6x - y^2 = 0 \\ y(2y^2 - x) = 0 \end{cases}$$

La seule solution de ce système étant $(x, y) = (0, 0)$, la fonction g n'a qu'un point stationnaire. Etant donné que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = 6, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2 - 2x, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = -2y \quad \text{et} \quad \det(\text{Hess}_g(x, y)) = 68y^2 - 12x,$$

nous trouvons $\det(\text{Hess}_g(0, 0)) = 0$ et le théorème du cours ne nous permet pas de déterminer la nature du point $(0, 0)$. Néanmoins, comme

$$g(x, y) = y^4 - 2\frac{1}{2}xy^2 + (\frac{1}{2}x)^2 - (\frac{1}{2}x)^2 + 3x^2 = (y^2 - \frac{1}{2}x)^2 + \frac{11}{4}x^2 \geq 0 = g(0, 0),$$

le point $(0, 0)$ est un point de minimum global.

c) Etant donné que

$$\nabla h(x, y) = (-y \sin x - \cos x, 2y + \cos x),$$

les points stationnaires satisfont les équations

$$\begin{cases} -y \sin x - \cos x = 0 \\ 2y + \cos x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y(2 - \sin x) = 0 \\ 2y + \cos x = 0 \end{cases}$$

et sont donc de la forme $(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Le calcul des dérivées de deuxième ordre nous donne

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) = -y \cos x + \sin x, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x, y) = -\sin x.$$

Par conséquent le hessien est $\det(\text{Hess}_h(x, y)) = 2(-y \cos x + \sin x) - \sin^2 x$. Comme

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right) = (-1)^k \quad \text{et} \quad \det(\text{Hess}_h\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)) = 2(-1)^k - 1,$$

le point $(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0)$ est un point selle si k est impair et un point de minimum local si k est pair.

Exercice 2. [Points stationnaires]

Déterminer les points stationnaires de la fonction de deux variables réelles

$$g(x, y) = 2x^2y - xy^2 - 6xy$$

et étudier leur nature (point selle, etc.).

Solution:

Etant donné que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 4xy - y^2 - 6y \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2x^2 - 2xy - 6x,$$

les points stationnaires de g satisfont les équations

$$y(4x - y - 6) = 0 \quad (1)$$

$$x(2x - 2y - 6) = 0 \quad (2)$$

La première équation est satisfaite si $y = 0$ ou si $y = 4x - 6$.

- Si $y = 0$, la deuxième équation devient $x(2x - 6) = 0$ et nous trouvons $x = 0$ ou $x = 3$.
- Si $y = 4x - 6$, la deuxième équation devient $x(-6x + 6) = 0$ et nous trouvons $x = 0$ ou $x = 1$. Si $x = 0$ alors $y = -6$ et si $x = 1$ alors $y = -2$. Ainsi, les points stationnaires de g sont

$$(0, 0), \quad (3, 0), \quad (0, -6), \quad (1, -2).$$

Comme

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = 4y, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = -2x, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = 4x - 2y - 6 \quad \text{et} \quad \det(\text{Hess}_g(x, y)) = -8xy - (4x - 2y - 6)^2,$$

un théorème du cours nous dit que $(0, 0)$, $(3, 0)$ et $(0, -6)$ sont des points selle alors que $(1, -2)$ est un point de maximum local.

Exercice 3. [Optimisation]

Une compagnie de boissons aux fruits met sur le marché une nouvelle boisson aux pommes dont les coûts de production sont donnés par la fonction

$$C(s, p) = 2200 + 27s^3 - 72sp + 8p^2,$$

où s et p sont les quantités de sucre et de pommes utilisées. Déterminer les quantités de sucre et de pommes requises pour minimiser les coûts de production, ainsi que la valeur de ce coût minimal.

Solution:

Les quantités de sucre et de pommes utilisées sont toutes les deux positives (ou nulles). Le domaine de définition de la fonction coût C est ainsi $D(C) = [0, \infty[\times [0, \infty[$. Comme les dérivées partielles

$$\frac{\partial C}{\partial s}(s, p) = 81s^2 - 72p \quad \text{et} \quad \frac{\partial C}{\partial p}(s, p) = -72s + 16p$$

existent partout, les points d'extremum se trouvent parmi les points stationnaires ou les points du bord de $D(C)$. Les points stationnaires sont $(0, 0)$ et $(4, 18)$ (solutions de $9s^2 = 8p$ et $2p = 9s$). Les points de bord sont de la forme $(s, 0)$ et $(0, p)$. Comme

$$C(4, 18) = 1336, \quad C(s, 0) = 2200 + 27s^3 \geq 2200 \quad \text{et} \quad C(0, p) = 2200 + 8p^2 \geq 2200,$$

le coût minimal est par conséquent $C(4, 18) = 1336$.

Exercice 4. [Étude d'une fonction]

Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sin x + \sin(x + y)$.

- Calculer la dérivée de f dans la direction du vecteur $(1, -1)$ en tout point (x, y) du plan.
- Donner l'équation du plan tangent au graphe au point $(0, \pi, 0)$.
- Existe-t-il un point du graphe tel que le plan tangent au graphe en ce point soit horizontal? Si oui, lequel?
- Déterminer les points d'extremum global de la fonction f sur $D = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

Solution:

- a) Comme $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos x + \cos(x + y) \\ \cos(x + y) \end{pmatrix}$, la dérivée de f dans la direction du vecteur $v = (1, -1)$ vaut

$$D_v f(x, y) = \langle v, \nabla f(x, y) \rangle = \cos x.$$

- b) Par définition, le plan tangent au graphe de f au point $(0, \pi, 0)$ est

$$z = f(0, \pi) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, \pi)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, \pi)(y - \pi) = 0 + 0 - (y - \pi) \iff y + z = \pi$$

- c) Le plan tangent au graphe de f au point $(x, y, f(x, y))$ est horizontal si $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Autrement dit, si (x, y) est un point stationnaire de f . Nous avons

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} \cos x + \cos(x + y) = 0 \\ \cos(x + y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos(x + y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi & \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ x + y = \frac{\pi}{2} + \ell\pi & \text{avec } \ell \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi & \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ y = m\pi & \text{avec } m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Par conséquent, le plan tangent est horizontal si $(x, y) = (\frac{\pi}{2} + k\pi, m\pi)$, avec $k, m \in \mathbb{Z}$.

d) Etant donné que la fonction f est continue et le domaine $D = [0, \pi] \times [0, \pi]$ est fermé et borné, la fonction f possède des points d'extremum global dans D . De plus, comme le gradient de f existe partout, ces points se trouvent soit parmi les points stationnaires de f soit sur le bord de D . D'après la partie c), les points stationnaires de f dans D sont $(\frac{\pi}{2}, 0)$ et $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. Sur le bord nous avons:

- $y = 0, 0 \leq x \leq \pi$: $f(x, 0) = 2 \sin x$ avec maximum en $x = \frac{\pi}{2}$ et minimum en $x = 0$ et $x = \pi$,

- $x = 0, 0 \leq y \leq \pi$: $f(0, y) = \sin y$ avec maximum en $y = \frac{\pi}{2}$ et minimum en $y = 0$ et $y = \pi$,

- $y = \pi, 0 \leq x \leq \pi$: $f(x, \pi) = 0$,

- $x = \pi, 0 \leq y \leq \pi$: $f(\pi, y) = -\sin y$ avec minimum en $y = \frac{\pi}{2}$ et maximum en $y = 0$ et $y = \pi$.

Comme

$$f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 2, \quad f(0, 0) = f(\pi, 0) = f(x, \pi) = 0, \quad f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad f\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = -1,$$

la fonction f restreinte au carré D est maximale en $(\frac{\pi}{2}, 0)$ et minimale en $(\pi, \frac{\pi}{2})$. De plus,

$$-1 \leq f(x, y) \leq 2 \text{ pour tout } (x, y) \in D.$$

Exercice 5. [Extrema sur un domaine fermé]

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x - y)^3 + 4x^2 - 3x + 3y$.

1) Donner les points stationnaires de f et étudier leur nature. Calculer f en ces points.

2) Soit T le domaine donné par:

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R} : y \geq 0, y \leq x \leq 4 - y\}.$$

Donner le minimum de le maximum de f sur T . En particulier,

i) Montrer que T est borné.

ii) Montrer que $\partial T \subset T$ et conclure que T est fermé.

iii) Montrer que T est un triangle et donner ses sommets.

iv) Expliquer pourquoi f atteint son minimum et son maximum sur T .

v) Donner f sur le bord de T , i.e. $f|_{\partial T}$ et étudier ensuite $f|_{\partial T}$.

vi) Donner le minimum et le maximum de f sur T .

Solution:

1) On cherche les points stationnaires de f . Pour cela on calcule le gradient et la matrice hessienne de f :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3(x - y)^2 + 8x - 3 \\ -3(x - y)^2 + 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Hess}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x - 6y + 8 & -6x + 6y \\ -6x + 6y & 6x - 6y \end{pmatrix}$$

Points stationnaires: $\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0, (x - y)^2 = 1$

$$P_1 = (0, -1), \quad P_2 = (0, 1)$$

$$\text{Hess}_f(0, -1) = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{Hess}_f(0, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$$

P_1 : c'est un minimum local car \det et $\text{trace} > 0$, $f(0, -1) = -2$

P_2 : c'est un point selle car $\det < 0$, $f(0, 1) = 2$

2) i) La définition de T nous donne les inégalités $0 \leq y \leq x \leq 4 - y \leq 4$. Donc

$$T \subset [0, 4] \times [0, 4]$$

ce qui implique que T est borné.

ii) Le bord ∂T est donné par les segments

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} : y = 0, x \in [0, 4]\}$$

$$S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} : y = 4 - x, x \in [2, 4]\}$$

$$S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} : y = x, x \in [0, 2]\}$$

qui sont dans T (vu les signes \leq et non $<$ dans la définition de T). Donc T est fermé.

iii) Le bord de T est donné par 3 segments qui ont 3 points d'intersection (les sommets):

$$A = (0, 0), \quad B = (4, 0), \quad C = (2, 2)$$

iv) La fonction f est continue (c'est un polynôme) et T borné et fermé d'où on conclut que f atteint son minimum et son maximum sur T .

v) Posons

$$f_1(x) := f|_{S_1} = f(x, 0) = x^3 + 4x^2 - 3x, \quad x \in [0, 4]$$

$$f_2(x) := f|_{S_2} = f(x, 4 - x) = 8x^3 - 44x^2 + 90x - 52, \quad x \in [2, 4]$$

$$f_3(x) := f|_{S_3} = f(x, x) = 4x^2, \quad x \in [0, 2]$$

Pour f_1 on a que

$$f_1'(x) := 3x^2 + 8x - 3, \quad \Rightarrow x = \frac{1}{3} \text{ est le seul point stationnaire de } f_1.$$

De plus on trouve $f_1(0) = 0$, $f_1(\frac{1}{3}) = -\frac{14}{27}$ et $f_1(4) = 116$.

Pour f_2 on a que

$$f_2'(x) := 24x^2 - 88x + 90, \quad \Rightarrow f_2 \text{ n'a aucun point stationnaire.}$$

De plus on trouve $f_2(2) = 16$ et $f_2(4) = 116$.

Pour f_3 on a que

$$f_3'(x) := 8x, \quad \Rightarrow x = 0 \text{ est le seul point stationnaire de } f_3.$$

De plus on trouve $f_3(0) = 0$ et $f_3(2) = 16$.

vi) Ainsi on trouve $\min f|_T = -\frac{14}{27}$, $\max f|_T = 116$

Exercice 6. [Vrai ou Faux]**V F**

- 1) La fonction $f(x, y) = 10^{65}x^2 - xy + 1000y^2$ est une forme quadratique.
- 2) Soit (a, b) un point stationnaire de f . Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) < 0$ alors (a, b) est un point col.
- 3) Si $\nabla f(x) = 0$ alors x est un extremum local de f .
- 4) Si $\text{Hess}_f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ alors f est constante.
- 5) Si $\text{Hess}_f(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ alors f est localement inversible.
- 6) Si $\text{Hess}_f(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ alors f n'a pas de point stationnaire.

Solution:

1) Vrai.

2) C'est vrai si f est de classe C^2 . En effet dans ce cas on a que $\text{Hess}_f(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{pmatrix}$ est symétrique et donc le déterminant est négatif (d'après l'hypothèse). Ceci a pour conséquence que la matrice hessienne possède des valeurs propres de signes différent et donc que (a, b) est un point col. Lorsque la fonction n'est pas de classe C^2 il faut faire attention et ce résultat est faux en général.

3) Faux. On a vu que l'on peut avoir des points cols.

4) Faux. Par exemple si $f(x, y) = x + y$ alors $\text{Hess}_f(x, y) = 0$ mais f n'est pas constante.

5) Vrai. Le seul cas possible est si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ avec $n = 1$ (sinon on ne peut pas parler de champs localement inversible). Dans ce cas, on a que $\text{Hess}_f(x) = f''(x)$. L'hypothèse signifie donc que $f''(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier on en déduit que f' n'est pas constante. Il existe donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) \neq 0$. Par conséquent, f est localement inversible autour de ce point (par le théorème des fonctions localement inversibles).

6) Faux. Par exemple si $f(x, y) = x^2 + y^2$, on a $\text{Hess}_f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ qui est inversible, tandis que f a un point stationnaire en $(0, 0)$.